

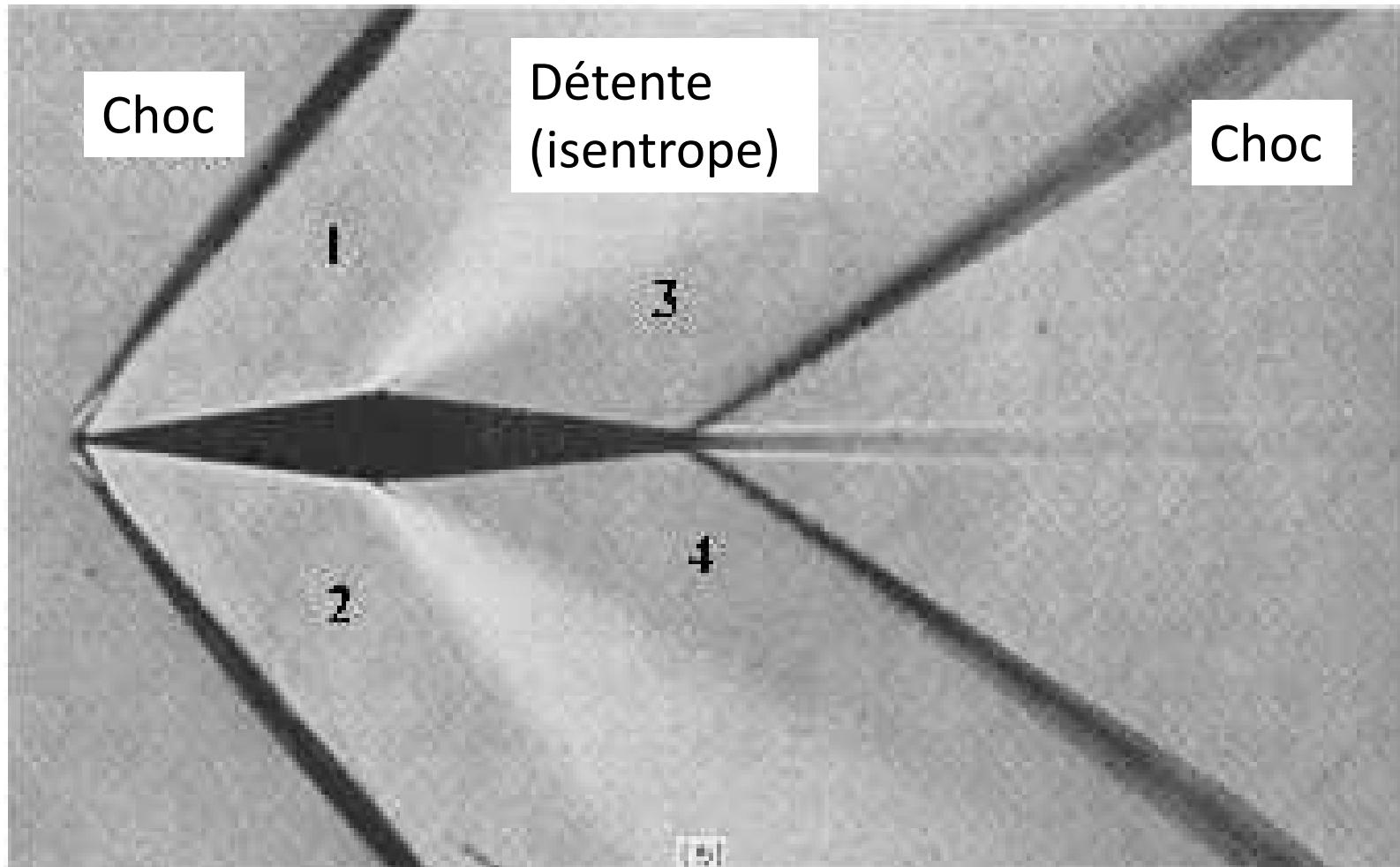
# Mécanique des Fluides Compressibles

## Ecoulement de Prandtl-Meyer

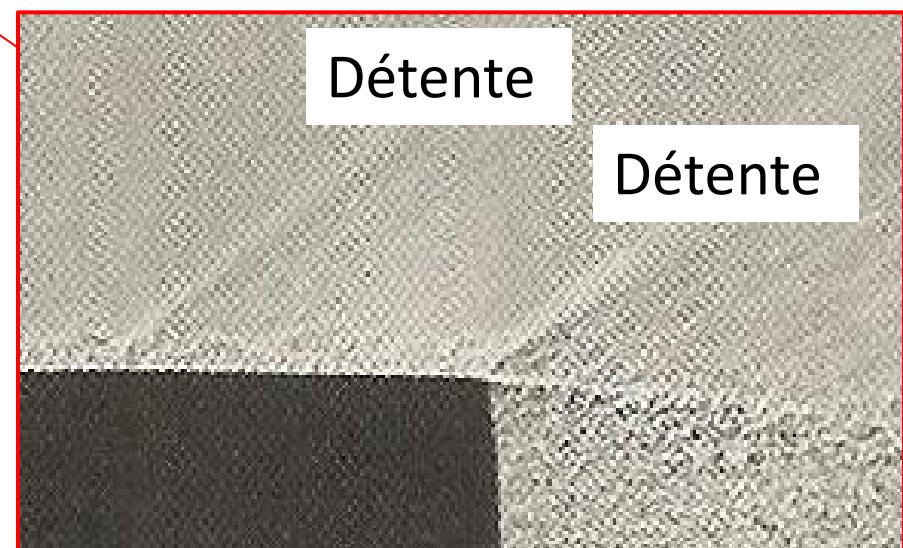
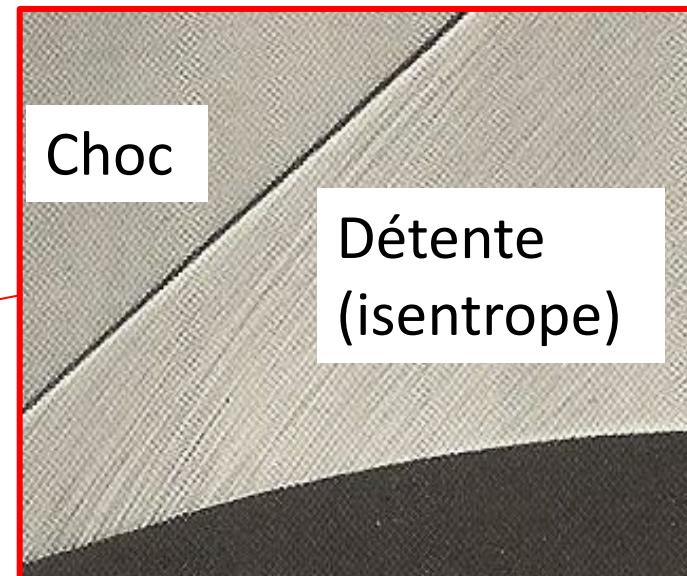
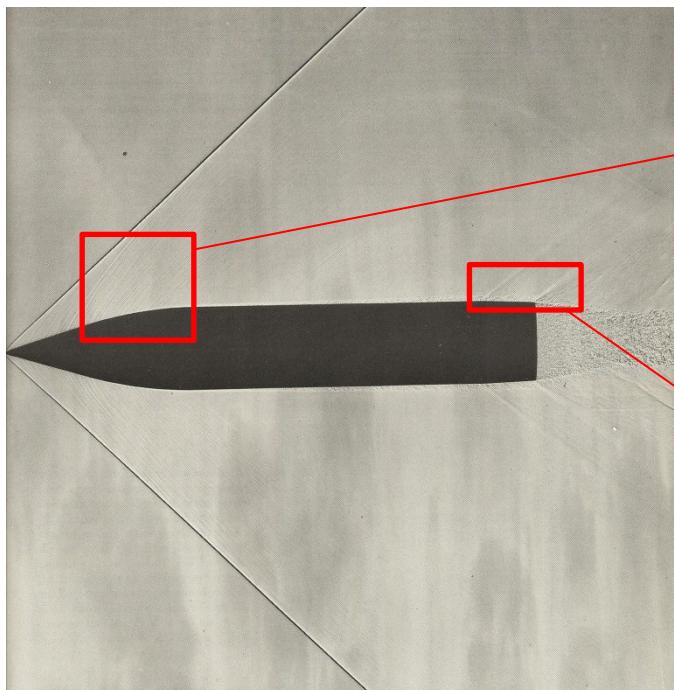
**Dr. Flavio NOCA**

Semestre printemps 2024-2025

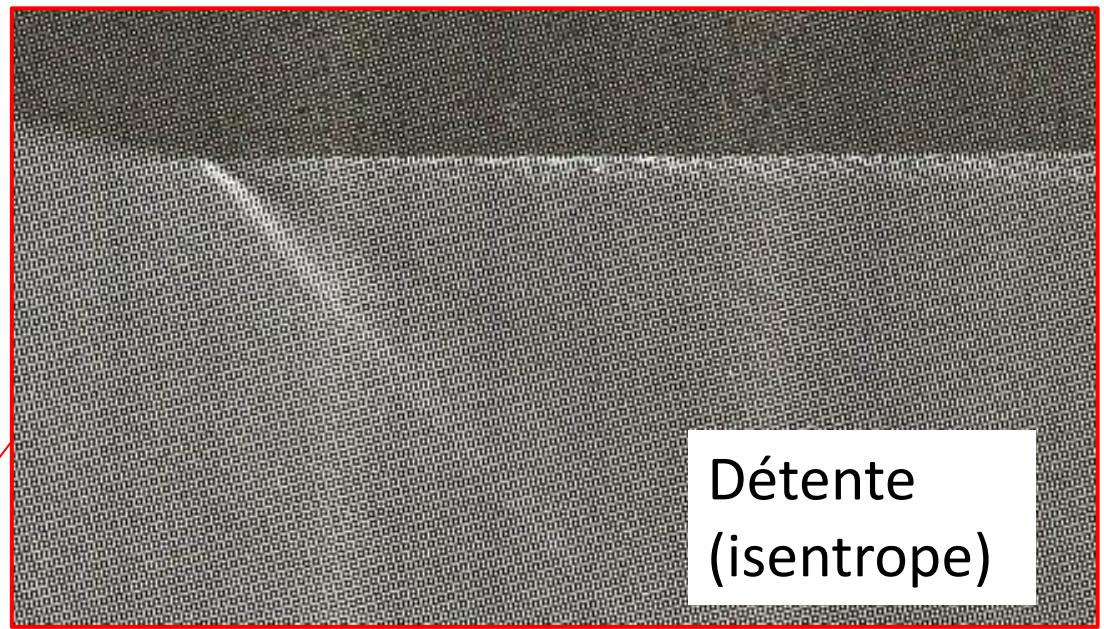
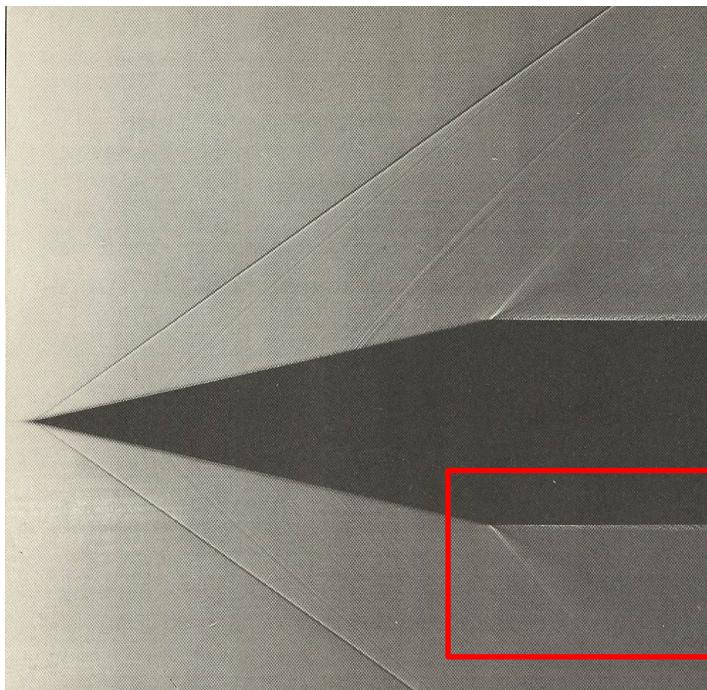
# Changement de direction sans chocs



# Changement de direction sans chocs

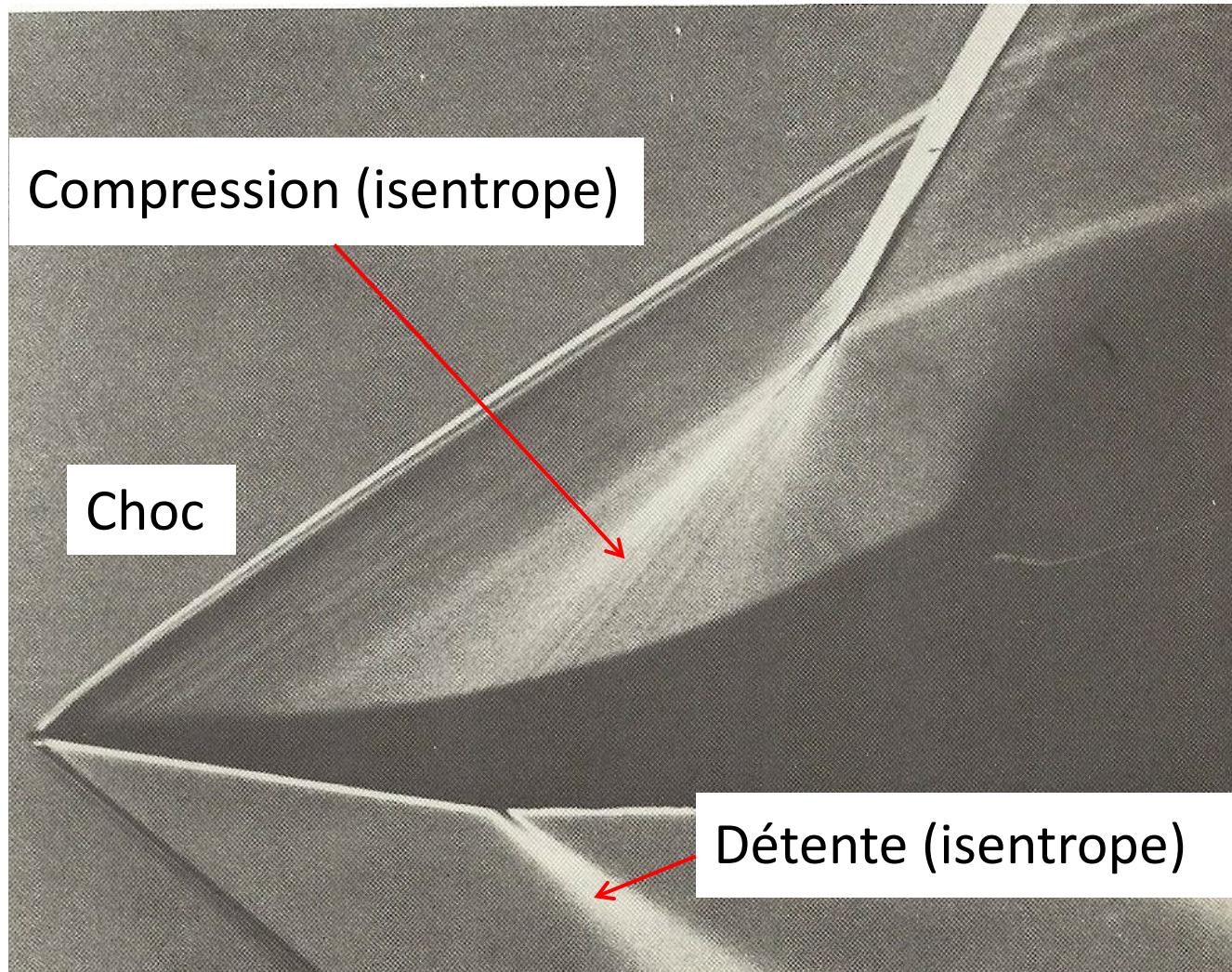


# Changement de direction sans chocs



Détente  
(isentrope)

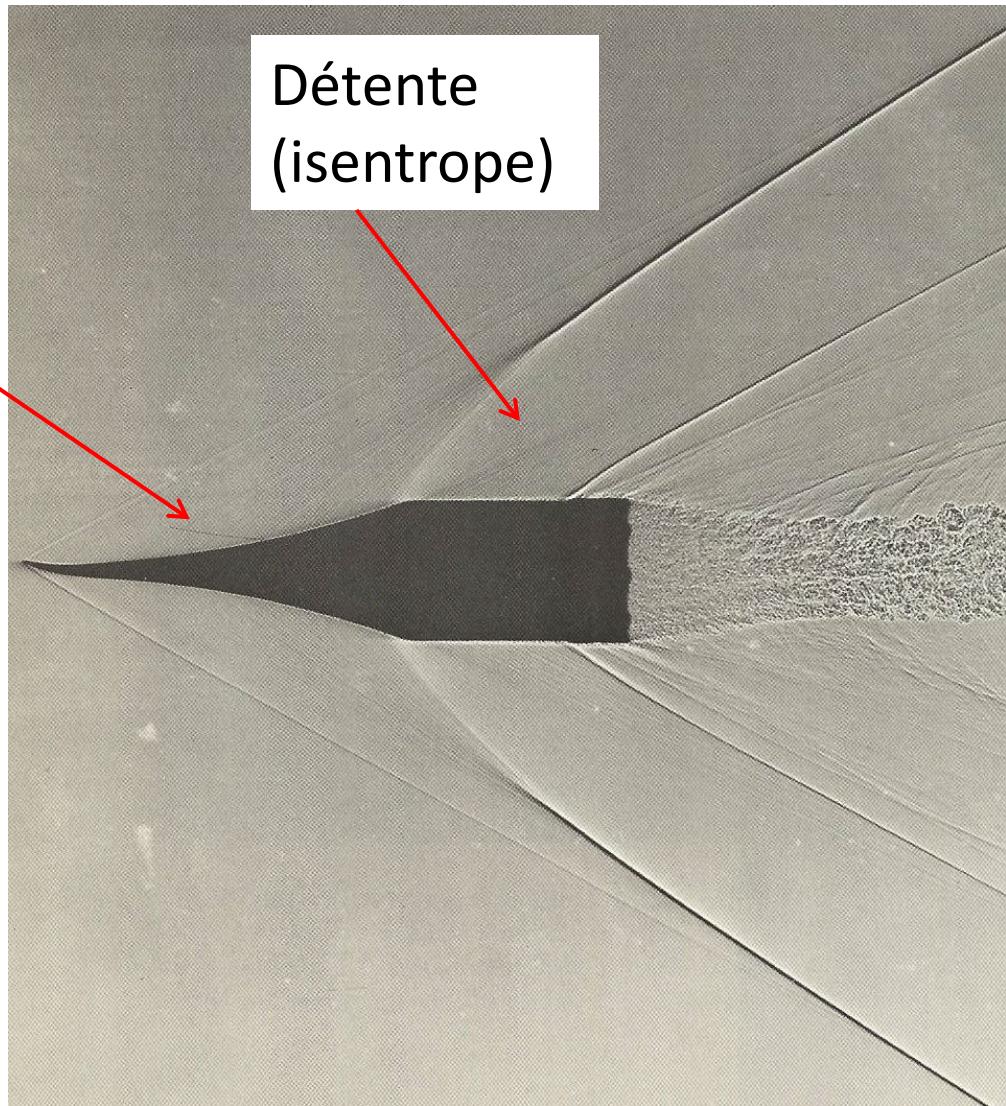
# Changement de direction sans chocs



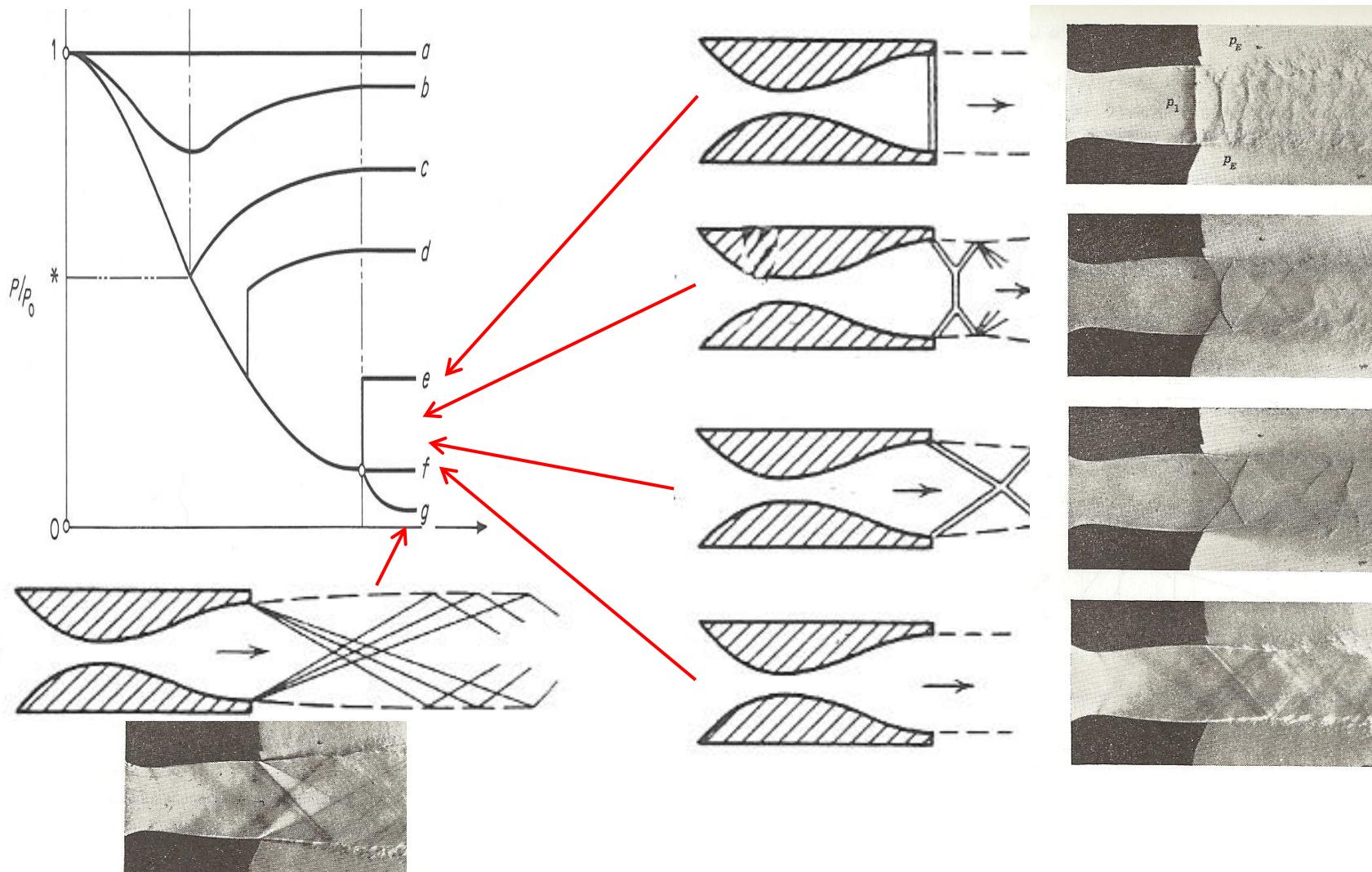
## Changement de direction sans chocs

Compression  
(isentrope)

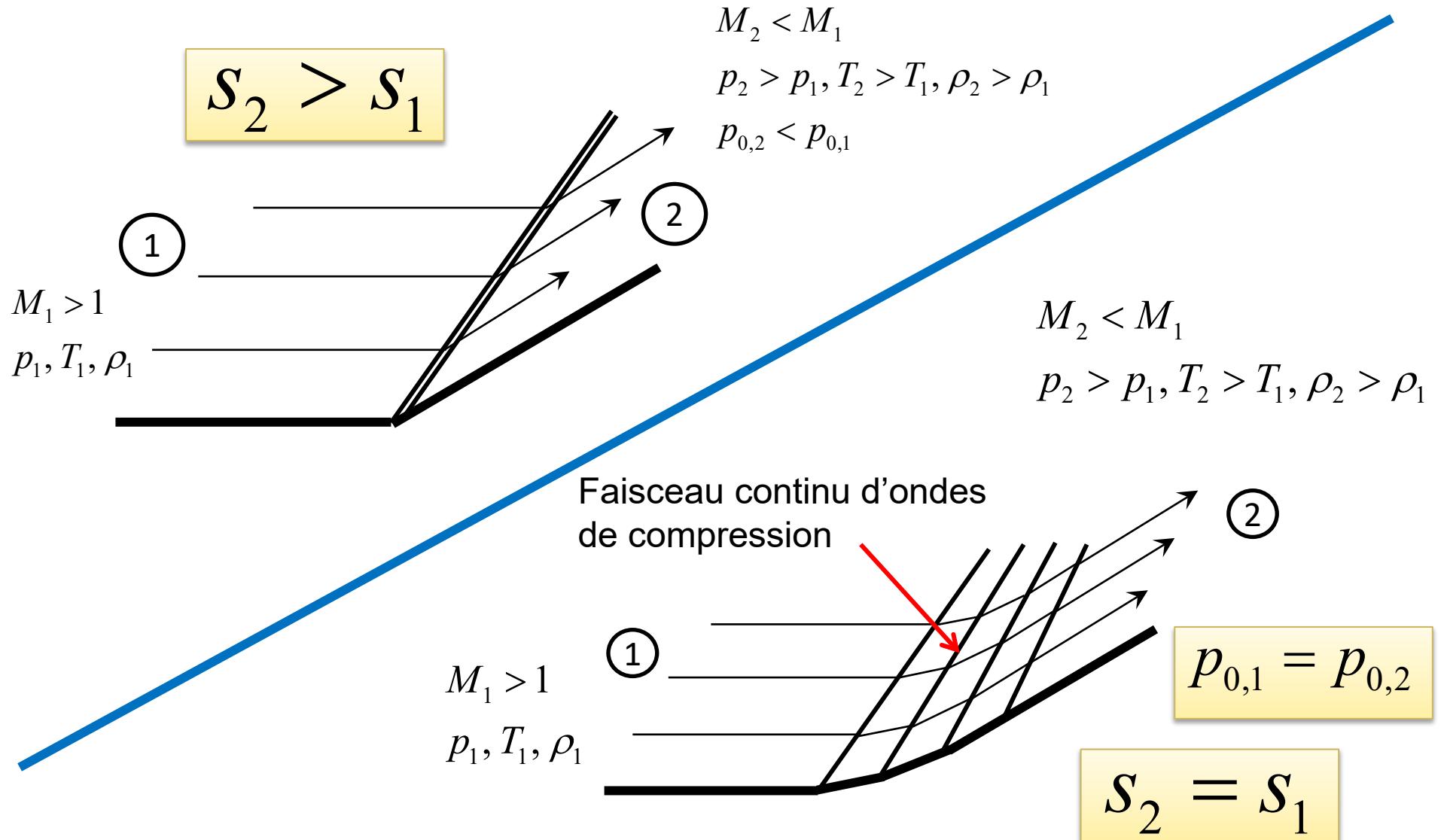
Détente  
(isentrope)



# Tuyère Convergente - Divergente



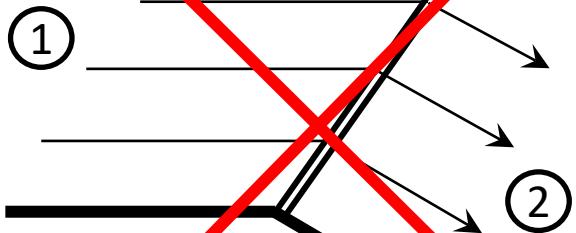
## Compression



## Détente

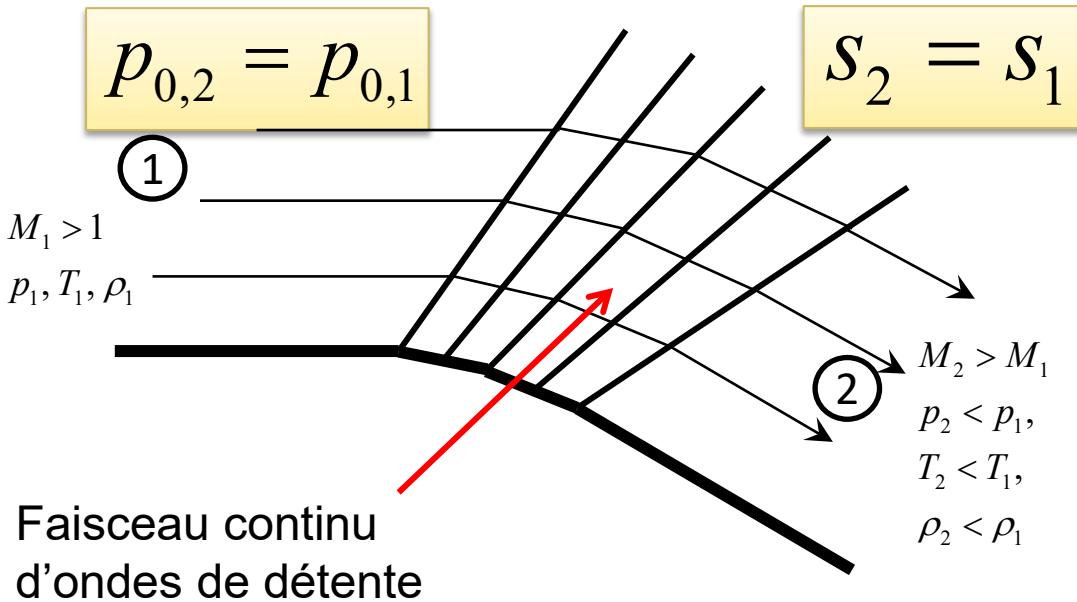
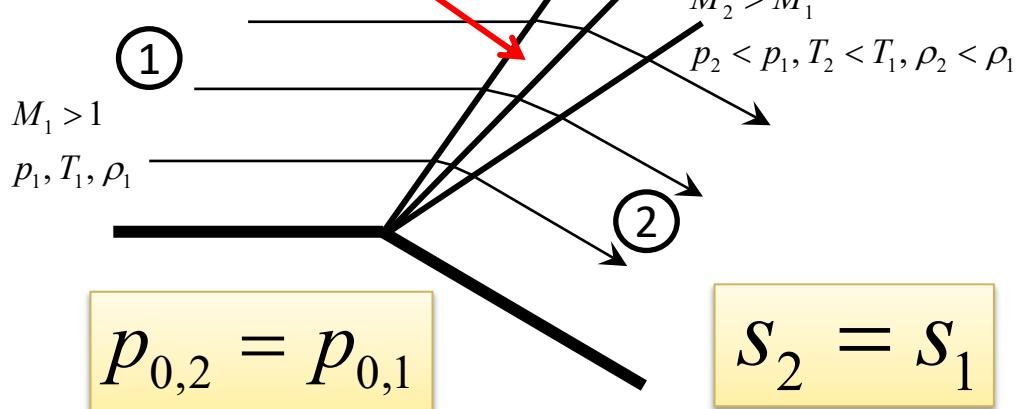
Choc de détente

$$\begin{aligned} M_1 &> 1 \\ p_1, T_1, \rho_1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_2 &> M_1 \\ p_2 < p_1, T_2 < T_1, \rho_2 < \rho_1 \end{aligned}$$

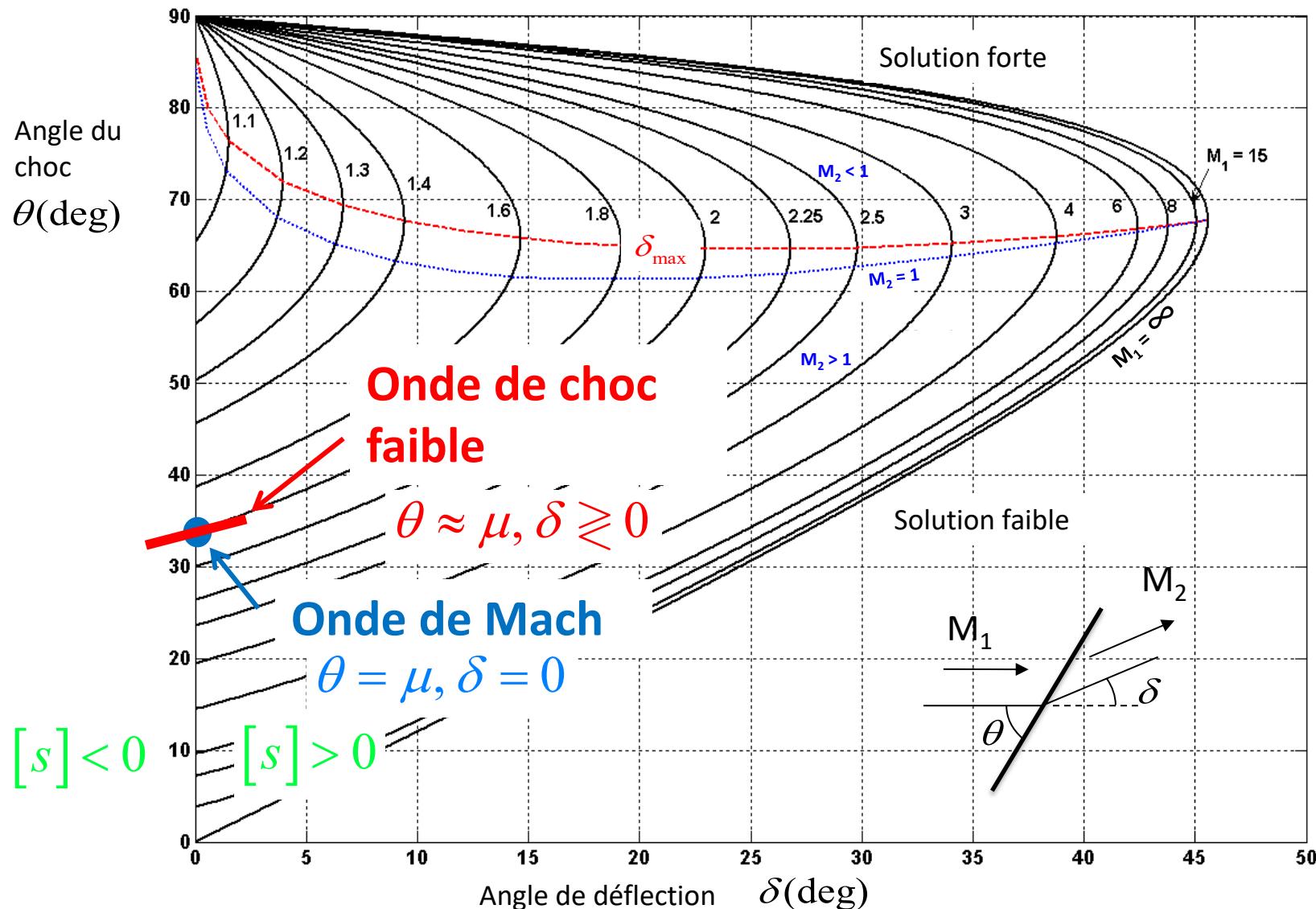
$$S_2 < S_1$$

Faisceau continu  
d'ondes de détente

$$p_{0,2} = p_{0,1}$$

$$S_2 = S_1$$

## Diagramme de chocs obliques



# Relation pour le saut en pression

➤ Il faut déterminer  $\theta$ . Géométriquement, on voit que:

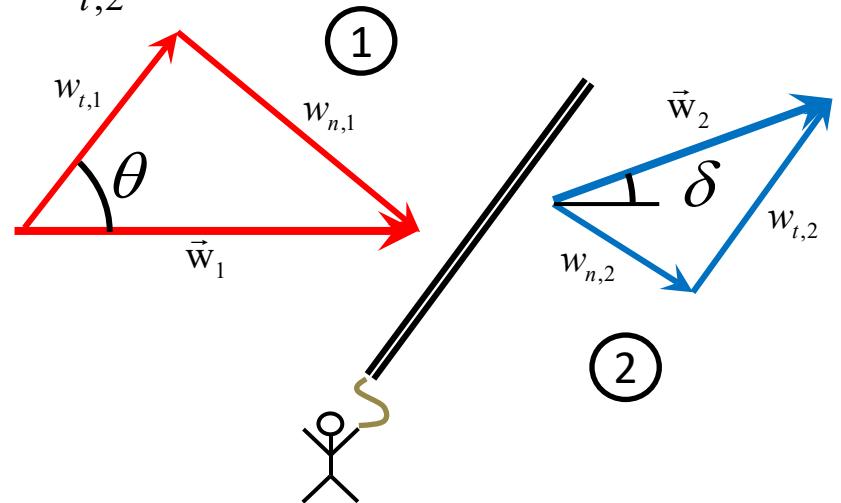
$$\tan \theta = \frac{w_{n,1}}{w_{t,1}}$$

$$\tan(\theta - \delta) = \frac{w_{n,2}}{w_{t,2}}$$

$$w_{t,1} = w_{t,2}$$

$$\frac{w_{n,2} - w_{n,1}}{w_t} = \tan(\theta - \delta) - \tan \theta$$

$$\frac{w_{n,2} - w_{n,1}}{w_t} = - \frac{\tan \delta}{\cos^2 \theta (1 + \tan \theta \tan \delta)}$$



## Relation pour le saut en pression

$$\frac{w_{n,2} - w_{n,1}}{w_t} = - \frac{\tan \delta}{\cos^2 \theta (1 + \tan \theta \tan \delta)}$$

$$w_t = a_1 M_1 \cos \theta$$


$$\frac{[w_n]}{a_1} = - \frac{M_1 \tan \delta}{\cos \theta + \sin \theta \tan \delta}$$

➤ Chapitre 7 (équation 7.30):  $\Pi \equiv \frac{[p]}{\rho_1 a_1^2} = - M_{n,1} \frac{[w_n]}{a_1}$


$$M_{n,1} = M_1 \sin \theta$$

$$\frac{\Pi}{M_1^2} = \frac{\tan \delta}{\cot \theta + \tan \delta}$$

## Relation pour le saut en pression pour les chocs faibles

- On suppose que le choc est infiniment faible (~ onde de Mach)

$$\theta \rightarrow \mu$$

$$\delta \rightarrow \Delta\delta$$



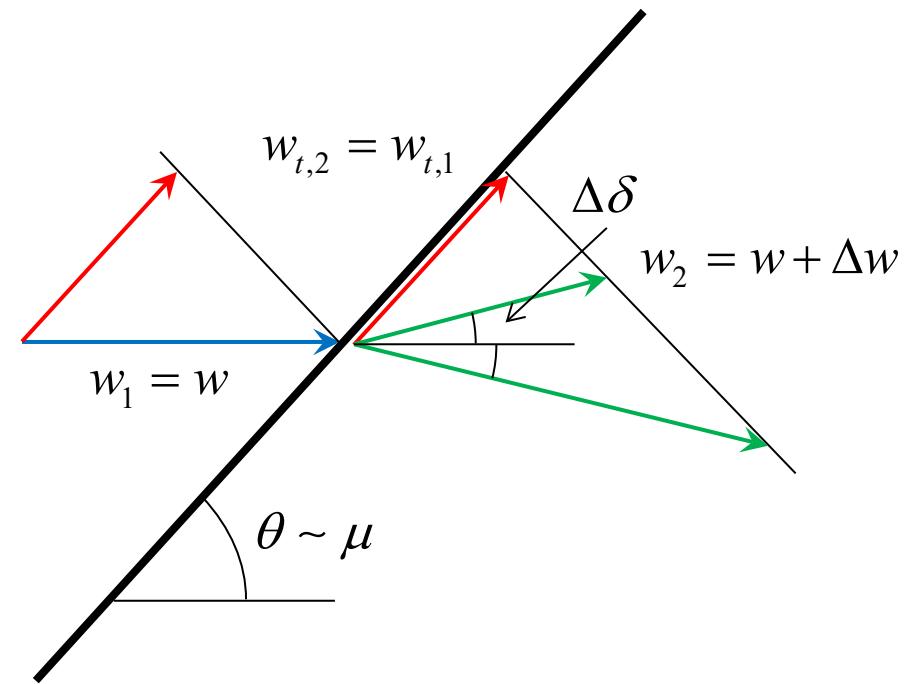
$$\cot \theta \rightarrow \cot \mu = \sqrt{M_1^2 - 1}$$

$$\tan \delta \rightarrow \Delta\delta$$

$$\sin \mu = \frac{1}{M}$$

$$\frac{\Pi}{M_1^2} = \frac{\tan \delta}{\cot \theta + \tan \delta}$$

$$\rightarrow \frac{\Pi_{\text{faible}}}{M_1^2} = \frac{\Delta\delta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$



- Pour les chocs faibles (Chapitre 7, équation 7.42)

$$\frac{T_1[s]}{a_1^2} = \frac{1}{6} \Gamma_1 \Pi^3 + O(\Pi^4)$$

$$\frac{\Pi_{\text{faible}}}{M_1^2} = \frac{\Delta\delta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$

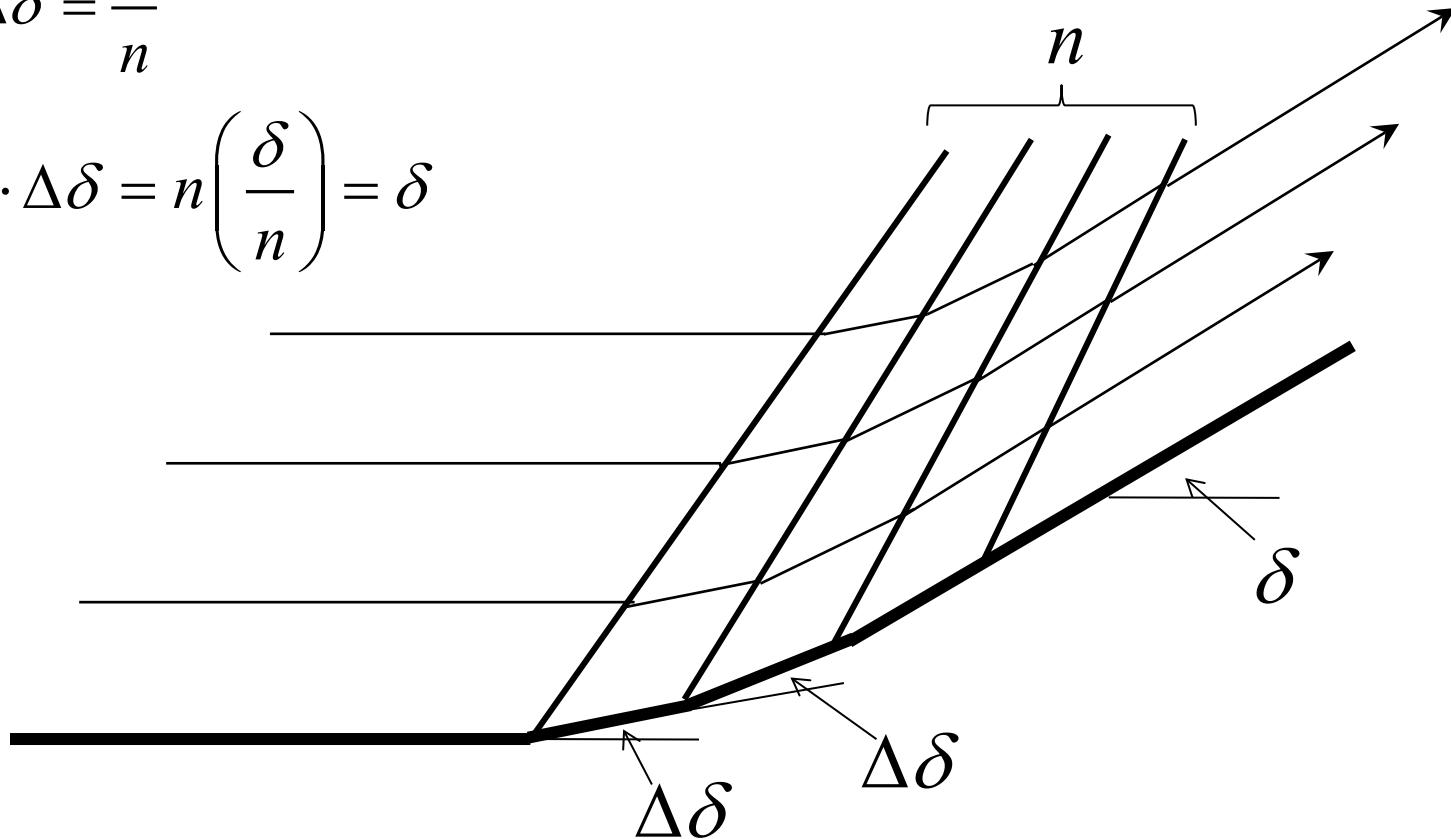


$$\frac{T_1[s]_{\text{faible}}}{a_1^2} = \frac{1}{6} \Gamma_1 \frac{M_1^6}{(M_1^2 - 1)^{3/2}} (\Delta\delta)^3$$

- Pour un faisceau constitué de  $n$  chocs obliques permettant une déviation  $\delta$

$$\Delta\delta = \frac{\delta}{n}$$

$$n \cdot \Delta\delta = n \left( \frac{\delta}{n} \right) = \delta$$



# Saut en entropie à travers un faisceau d'ondes de chocs infiniment faibles

- Saut en entropie à travers une onde de choc faible

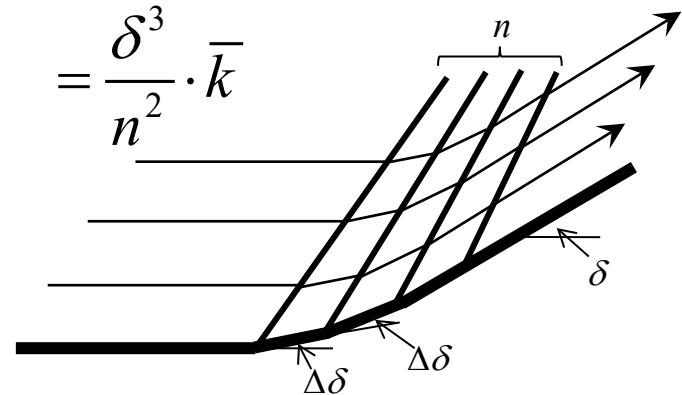
$$[s]_i = k_i (\Delta\delta)^3 = k_i \left(\frac{\delta}{n}\right)^3$$

$$\frac{T_1[s]_{\text{faible}}}{a_1^2} = \frac{1}{6} \Gamma_1 \frac{M_1^6}{(M_1^2 - 1)^{3/2}} (\Delta\delta)^3$$

- Saut en entropie à travers le faisceau entier

$$[s] = \sum_{i=1}^n [s]_i = \sum_{i=1}^n k_i \left(\frac{\delta}{n}\right)^3 = \frac{\delta^3}{n^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i\right) = \frac{\delta^3}{n^2} \cdot \bar{k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [s] = \delta^3 \bar{k} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$



L'écoulement à travers un faisceau continu de chocs infiniment faibles est **isentropique**

# Saut en pression à travers un faisceau d'ondes de chocs infiniment faibles

- Saut en pression à travers une onde de choc faible

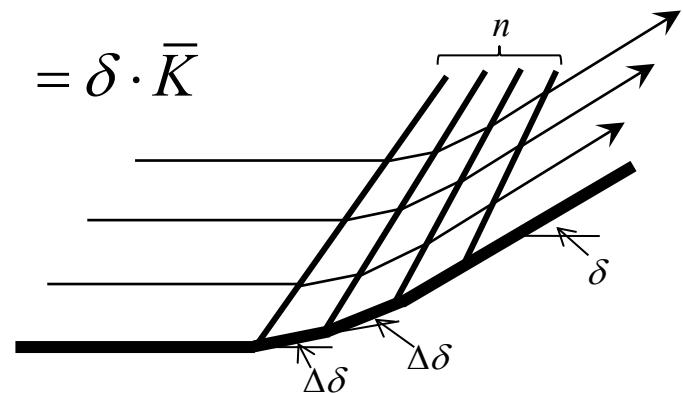
$$[p]_i = K_i \Delta\delta$$

$$\frac{\Pi_{\text{faible}}}{M_1^2} = \frac{\Delta\delta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$

- Saut en pression à travers le faisceau entier

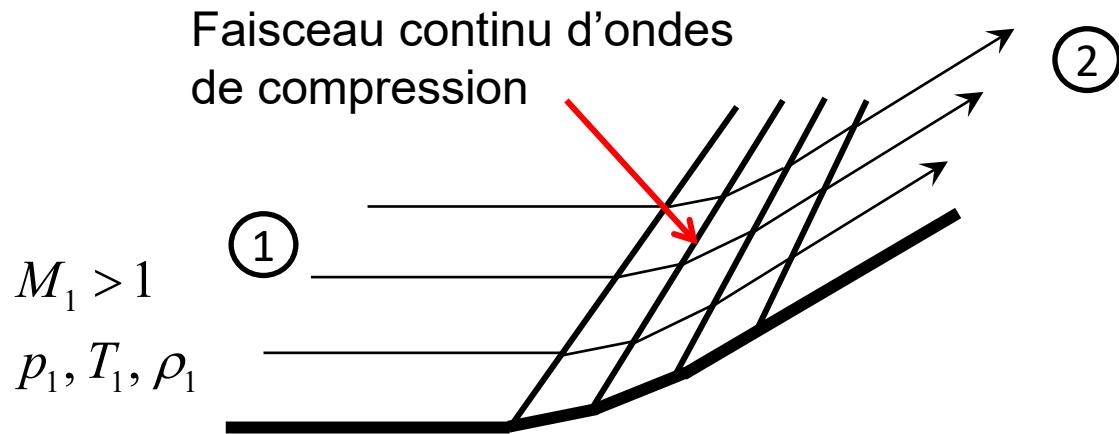
$$[p] = \sum_{i=1}^n [p]_i = \sum_{i=1}^n K_i \frac{\delta}{n} = \delta \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_i \right) = \delta \cdot \bar{K}$$

Le saut en pression est fini



- Comme l'écoulement est **isentropique**, on peut avoir:  $\delta > 0$  ou  $\delta < 0$

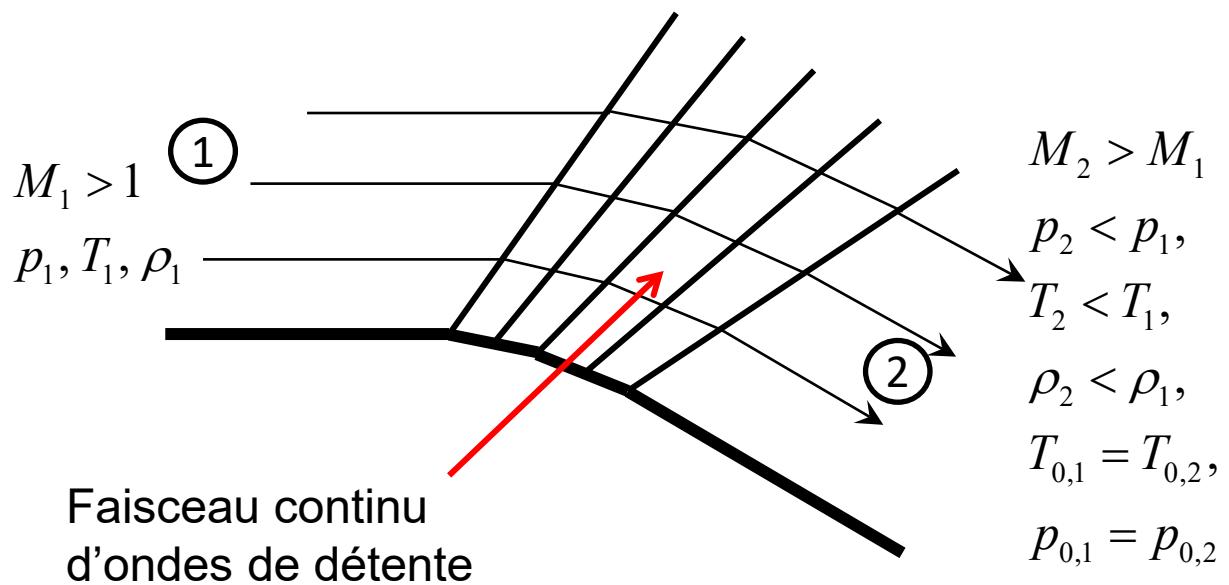
On peut avoir une DETENTE ou une COMPRESSION



$$\begin{aligned} M_2 &< M_1 \\ p_2 &> p_1, T_2 > T_1, \rho_2 > \rho_1 \\ T_{0,1} &= T_{0,2}, p_{0,1} = p_{0,2} \end{aligned}$$

On peut utiliser toutes les relations isentropiques connues

Il reste à trouver le lien explicite avec  $\delta$



$$\begin{aligned} M_2 &> M_1 \\ p_2 &< p_1, \\ T_2 &< T_1, \\ \rho_2 &< \rho_1, \\ T_{0,1} &= T_{0,2}, \\ p_{0,1} &= p_{0,2} \end{aligned}$$

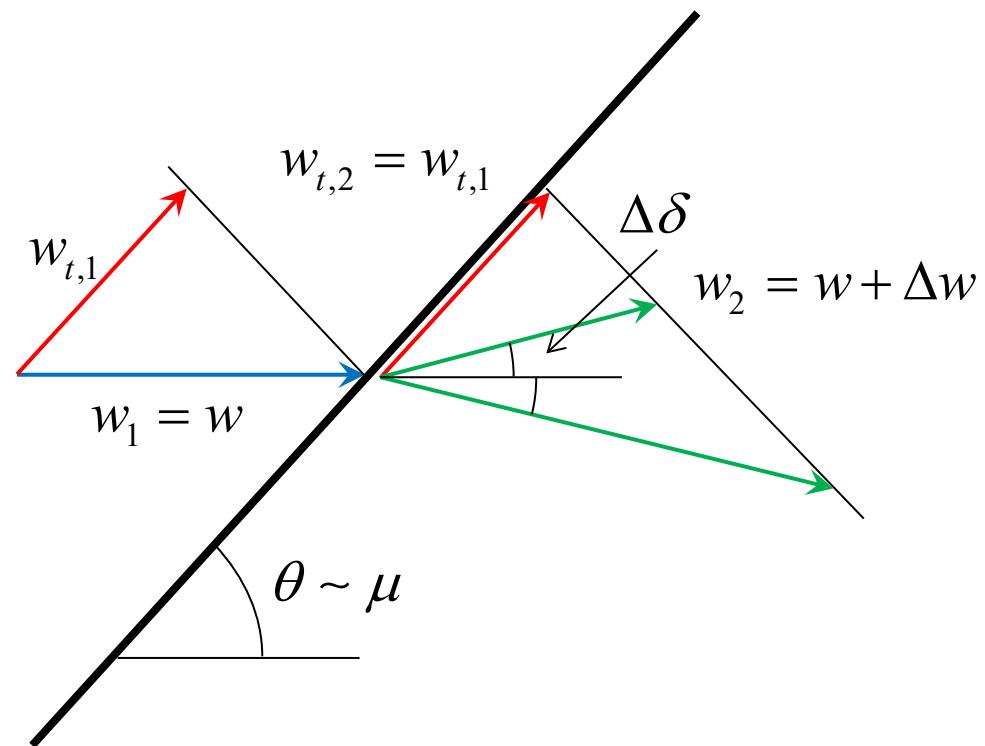
# Variation infinitésimale à travers une ligne de Mach

- Variation de vitesse

$\Delta w$

- Déviation de la vitesse

$\Delta \delta$



$\Delta \delta > 0 \rightarrow$  Compression isentrope

$\Delta \delta < 0 \rightarrow$  Détente isentrope

# Variation infinitésimale à travers une ligne de Mach

$$\frac{w_{t,1}}{w_1} = \frac{w_{t,1}}{w} = \cos \theta \rightarrow \cos \mu$$

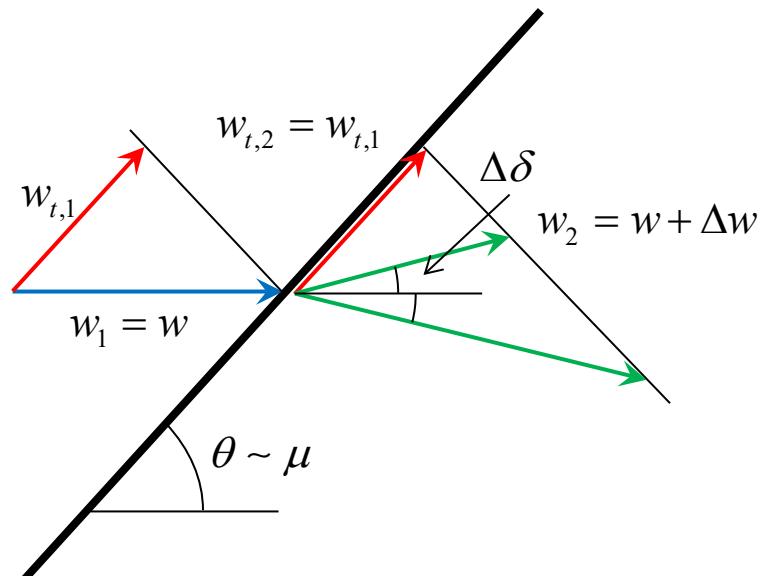
$$\frac{w_{t,2}}{w_2} = \frac{w_{t,2}}{w + \Delta w} = \cos(\theta - \Delta\delta) \rightarrow \cos(\mu - \Delta\delta)$$

➤ Comme la vitesse tangentielle ne change pas

$$\frac{w}{w + dw} = \frac{\cos(\mu - \Delta\delta)}{\cos \mu}$$

➤ Or:  $\cos(\mu - \Delta\delta) = \cos \mu \cos \Delta\delta + \sin \mu \sin \Delta\delta$

➤ Et pour  $\Delta\delta$  petit:  $\cos(\mu - \Delta\delta) \rightarrow \cos \mu + \sin \mu \cdot \Delta\delta$



# Variation infinitésimale à travers une ligne de Mach

➤ Ainsi

$$\frac{w}{w + \Delta w} = \frac{\cos(\mu - \Delta\delta)}{\cos \mu} \rightarrow 1 + \tan \mu \cdot \Delta\delta = 1 + \frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \Delta\delta$$

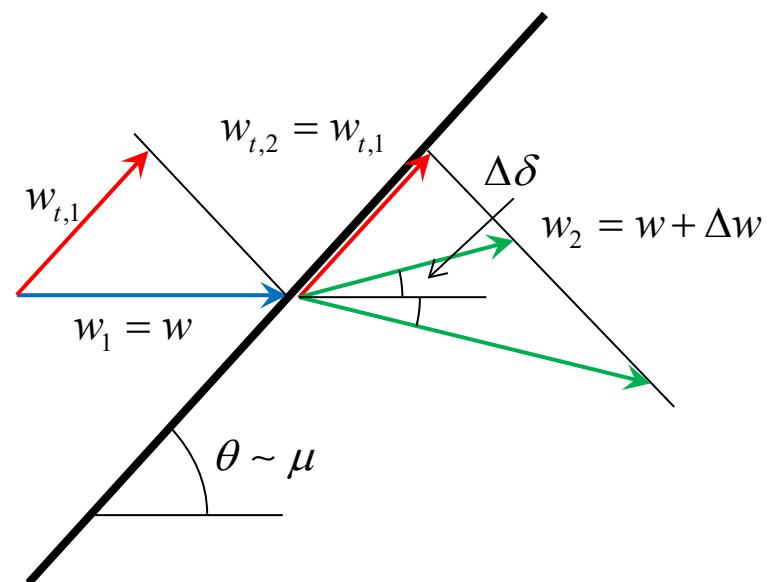
$$\sin \mu = \frac{1}{M_1}$$

➤ De plus

$$\frac{w}{w + \Delta w} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta w}{w}} \approx 1 - \frac{\Delta w}{w}$$

➤ On obtient  $\Delta\delta = -\sqrt{M_1^2 - 1} \cdot \frac{\Delta w}{w}$

$$d\delta = -\sqrt{M_1^2 - 1} \cdot \frac{dw}{w}$$



- Rappel, Chapitre 4

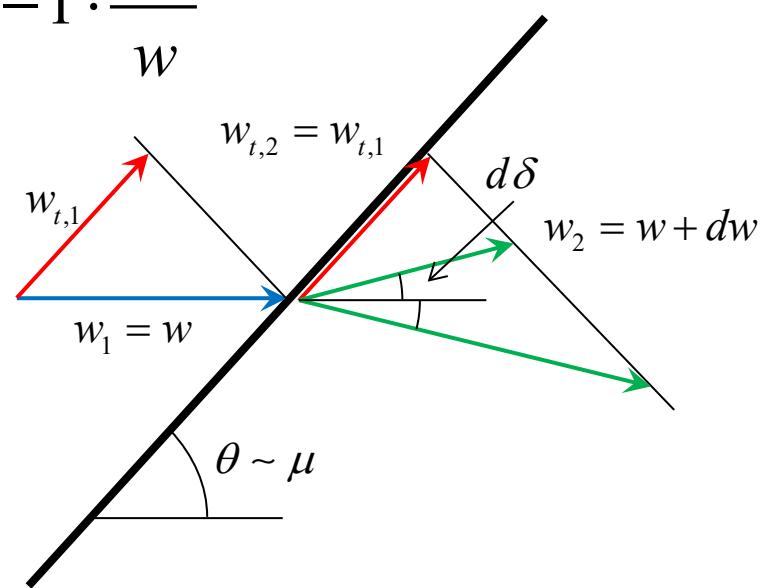
$$\frac{dw}{w} = \frac{dM/M}{1 + (\Gamma - 1)M^2}$$

- Avec la relation précédente  $d\delta = -\sqrt{M_1^2 - 1} \cdot \frac{dw}{w}$

$$d\delta = -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + (\Gamma - 1)M^2} \frac{dM}{M}$$

- Pour un gaz parfait  $\Gamma = \frac{\gamma + 1}{2}$

$$d\delta = -\frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2} \frac{dM}{M}$$



- On définit la fonction de Prandtl-Meyer

$$\nu(M) \equiv + \int_1^M \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

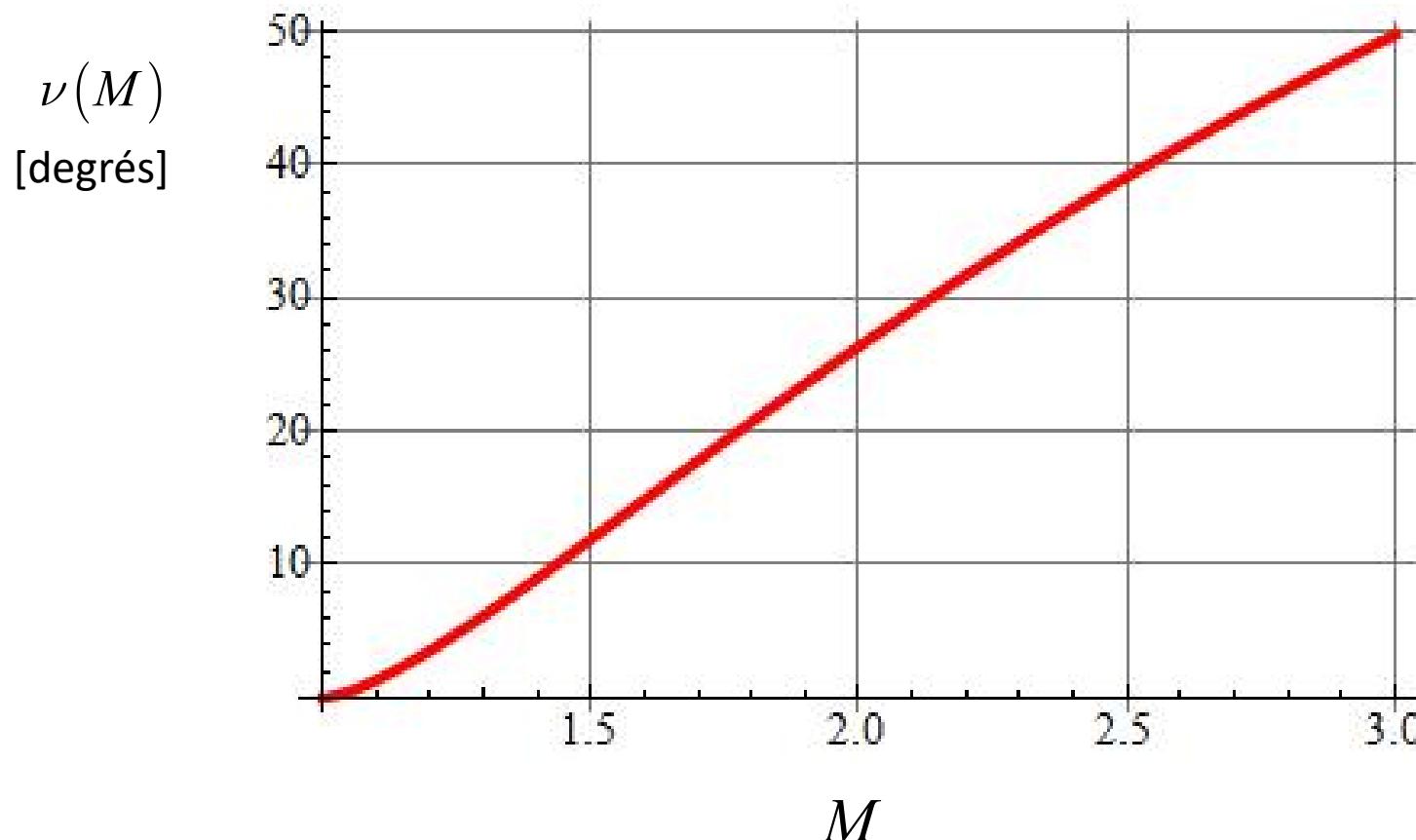
$$d\delta = - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

- Elle peut être obtenue analytiquement

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$

La fonction  $\nu(M)$  est connue sous le nom de Prandtl-Meyer

# Fonction de Prandtl-Meyer



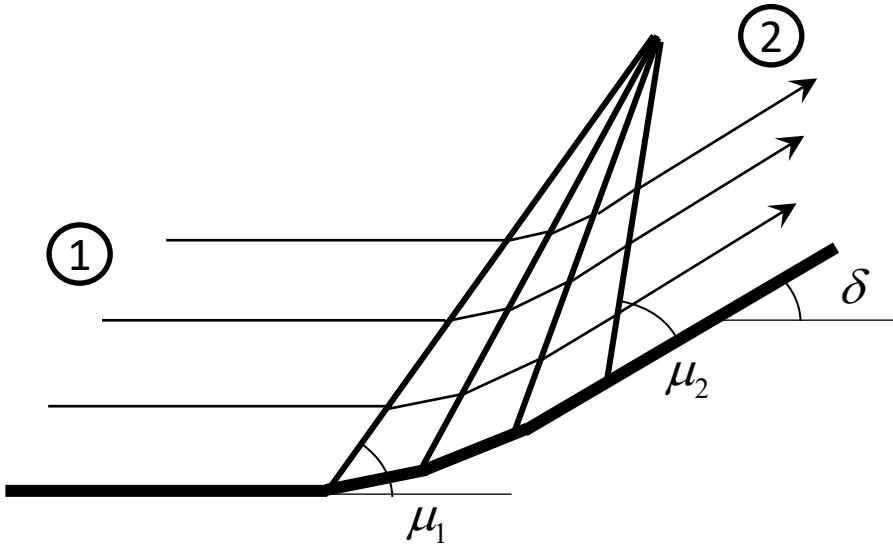
$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} - \arctan \sqrt{M^2 - 1}$$

**TABLE E.1** Prandtl–Meyer Functions ( $\gamma = 1.4$ )

<i>M</i>	<i>v</i>	$\mu$	<i>M</i>	<i>v</i>	$\mu$
1.00	0.0000	90.0000	1.92	24.1506	31.3882
1.02	0.1257	78.6351	1.94	24.7123	31.0285
1.04	0.3510	74.0576	1.96	25.2711	30.6774
1.06	0.6367	70.6300	1.98	25.8269	30.3347
1.08	0.9680	67.8084	2.00	26.3798	30.0000
1.10	1.3362	65.3800	2.02	26.9295	29.6730
1.12	1.7350	63.2345	2.04	27.4762	29.3535
1.14	2.1600	61.3056	2.06	28.0197	29.0411
1.16	2.6073	59.5497	2.08	28.5600	28.7357
1.18	3.0743	57.9362	2.10	29.0971	28.4369
1.20	3.5582	56.4427	2.12	29.6308	28.1446
1.22	4.0572	55.0520	2.14	30.1613	27.8585
1.24	4.5694	53.7507	2.16	30.6884	27.5785
1.26	5.0931	52.5280	2.18	31.2121	27.3043
1.28	5.6272	51.3752	2.20	31.7325	27.0357
1.30	6.1703	50.2849	2.22	32.2494	26.7726
1.32	6.7213	49.2509	2.24	32.7629	26.5148
1.34	7.2794	48.2682	2.26	33.2730	26.2621
1.36	7.8435	47.3321	2.28	33.7796	26.0144
1.38	8.4130	46.4387	2.30	34.2828	25.7715
1.40	8.9870	45.5847	2.32	34.7825	25.5332

## Problème

- Données  $M_1, \delta$
- Inconnues  $M_2$



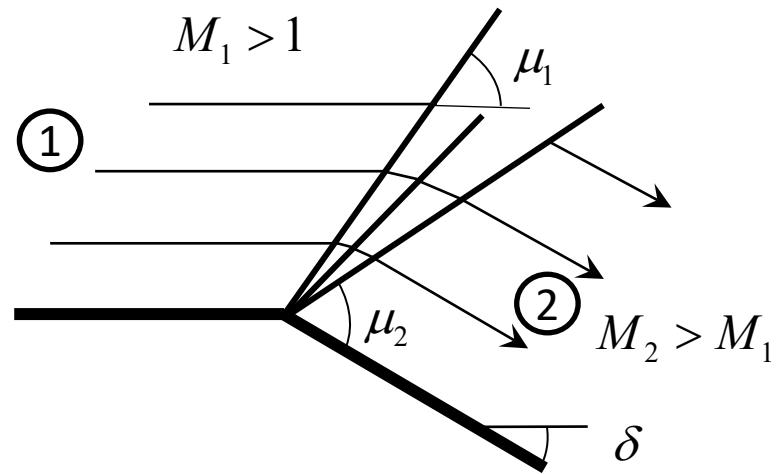
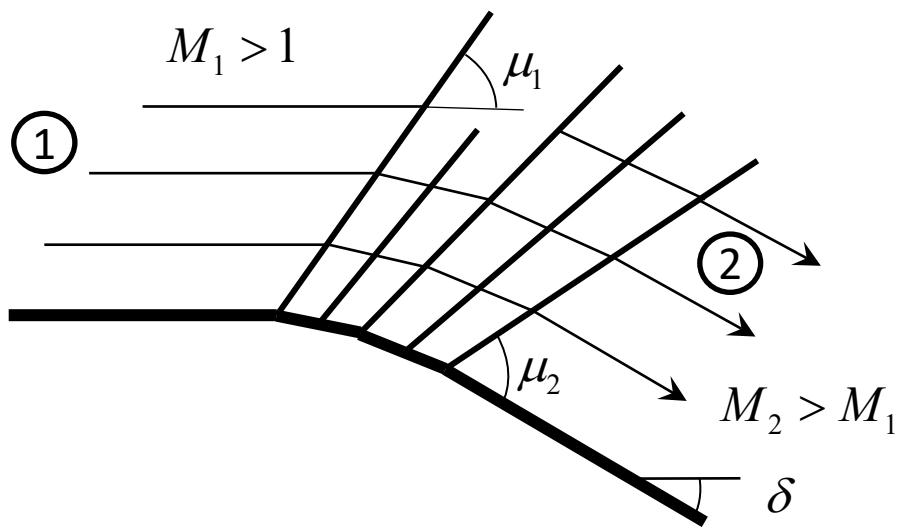
➤ On a donc

$$\int_1^2 d\delta = \delta = - \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = - \int_1^{M_2} (...) + \int_1^{M_1} (...)$$

➤ Et on obtient pour une onde de **compression** isentrope

$$\nu_2(M_2) = \nu_1(M_1) - \delta \quad \delta > 0$$

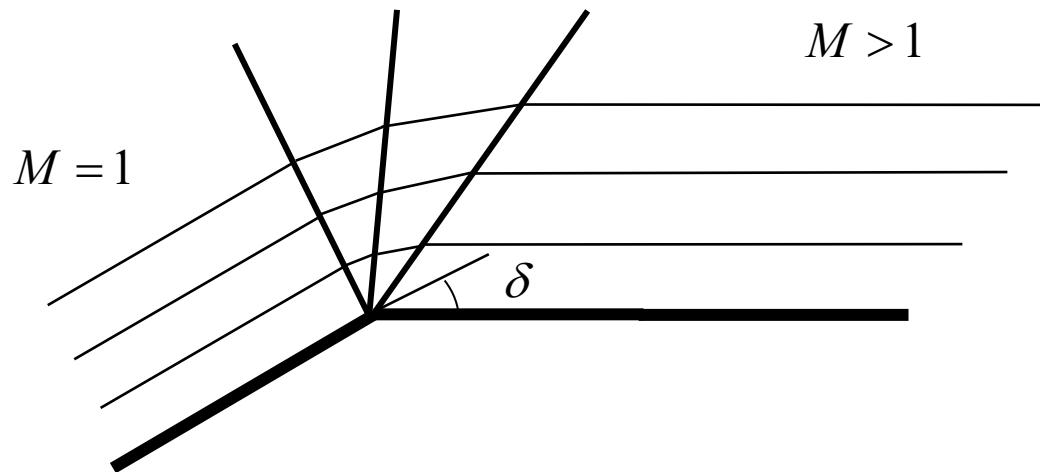
# Utilisation de la fonction de Prandtl-Meyer



- On obtient pour une onde de **détente** isentrope

$$\nu_2(M_2) = \nu_1(M_1) - \delta \quad \delta < 0$$

# Que représente la fonction de Prandtl-Meyer?



$$\nu(M) = \int_{M=1}^M \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = -\delta \quad \delta < 0$$

La fonction Prandtl-Meyer  $\nu(M)$  représente l'angle dont doit s'ouvrir une rampe afin de détendre l'écoulement de  $M=1$  à  $M$